Der Optionspreis: vom Münzwurf zur Formel von Black und Scholes

Kapitel 6 von 10

Der Preis einer Option ist kein Erwartungswert und keine Prognose. Er ist der Preis eines Depots aus Index und Kredit, das die Auszahlung der Option genau nachbildet. Dieses Kapitel leitet das an einem einzigen Münzwurf vollständig her, baut daraus den Binomialbaum, zeigt den Übergang zur Formel von Black und Scholes und erklärt implizite Volatilität, Skew und die Prämie, die Optionsverkäufer im Mittel verdienen.

Feld	Wert
Reihe	Futures, Optionen und wer den Preis macht
Umfang	Kapitel 6 von 10
Art	Erklärung mit durchgerechneten Beispielen, keine Messung
Stand	11. November 2026
Autor	Timon Krüger
Online	kruegeralgorithms.com/de/research/option-pricing-binomial-to-black-scholes

Inhalt

1. Die naheliegende Rechnung, und warum sie falsch ist 2
2. Der Nachbau: ein Depot, das dasselbe auszahlt 2
3. Warum es dieser Preis sein muss 3
4. Die allgemeine Formel 3
5. Zwei Schritte: Der Nachbau muss angepasst werden 4
6. Viele Schritte 5
7. Die Formel von Black und Scholes 6
8. Die implizite Volatilität 7
9. Der Skew: Versicherung kostet extra 7
10. Die Vola-Prämie: implizit liegt über realisiert 8
Häufiger Irrtum 8
Was du jetzt verstehen solltest 8
Grenzen dieser Darstellung 8

In einem Satz: Eine Option kostet so viel wie das Depot aus Index und Kredit, das am Ende genau dasselbe auszahlt, und weil dieses Depot ohne jede Annahme über die Richtung des Marktes gebaut wird, steckt im Optionspreis keine Meinung dazu, sondern nur eine Annahme über die Schwankung.

Was dieses Kapitel ist: eine Herleitung mit Rechenbeispielen. Der Übergang vom Baum zur Formel wird gezeigt, nicht streng bewiesen. Die Zahlen zum Skew sind Beispielwerte. Die Zahlen zur Vola-Prämie stammen aus unserer eigenen Messung und sind verlinkt. **Keine Handelsempfehlung.**

Kapitel 5 hat offen gelassen, warum der Call mit Basispreis 7.000 gerade 128,09 Punkte kostet. Hier wird dieser Preis hergeleitet.

1. Die naheliegende Rechnung, und warum sie falsch ist

Der Index steht bei 7.000. Zur Vereinfachung gibt es in einem Monat nur zwei Möglichkeiten: Er steht bei 7.350 (plus 5 %) oder bei 6.650 (minus 5 %). Der Zins ist null. Ein Call mit Basispreis 7.000 zahlt dann 350 oder nichts.

Was ist er heute wert? Naheliegend ist der Erwartungswert: Auszahlung mal Wahrscheinlichkeit.

- Wer beide Fälle für gleich wahrscheinlich hält, rechnet $0{,}5 \times 350 = 175$.
- Wer zu 70 % mit einem Anstieg rechnet, kommt auf $0{,}7 \times 350 = 245$.

Danach hätte jeder seinen eigenen Preis, je nach Meinung. Tatsächlich gibt es nur einen richtigen Preis, und um ihn zu finden, muss man die Wahrscheinlichkeit gar nicht kennen.

2. Der Nachbau: ein Depot, das dasselbe auszahlt

Die Idee: Wir bauen aus zwei Dingen, deren Preis wir kennen, ein Depot, das in beiden Fällen genau so viel wert ist wie der Call. Die zwei Dinge sind der Index selbst und ein Kredit.

Das Depot besteht aus Δ Einheiten des Index, finanziert zum Teil mit einem Kredit der Höhe B. Es soll in beiden Fällen so viel wert sein wie der Call:

$$\begin{aligned} \text{Index steigt:} \quad & \Delta \times 7.350 - B = 350 \\ \text{Index fällt:} \quad & \Delta \times 6.650 - B = 0 \end{aligned}$$

Schritt 1: Die zweite Gleichung von der ersten abziehen. Der Kredit fällt heraus:

$$\Delta \times (7.350 - 6.650) = 350 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \frac{350}{700} = 0{,}5$$

Schritt 2: Den Kredit aus der zweiten Gleichung bestimmen.

$$B = 0{,}5 \times 6.650 = 3.325$$

Schritt 3: Was kostet dieses Depot heute? Eine halbe Indexeinheit kostet 3.500, davon sind 3.325 geliehen:

$$0{,}5 \times 7.000 - 3.325 = 175$$

Die Probe. Steigt der Index, ist die halbe Einheit 3.675 wert, abzüglich 3.325 Kredit bleiben 350. Fällt er, ist sie 3.325 wert, abzüglich Kredit bleibt null. Das Depot zahlt in beiden Fällen genau wie der Call.

Zwei Dinge, die in jedem Fall dasselbe auszahlen, müssen heute dasselbe kosten. Der Call ist 175 wert.

3. Warum es dieser Preis sein muss

Angenommen, der Call wird zu 200 gehandelt, weil viele an steigende Kurse glauben. Ein Händler verkauft den Call und baut ihn für 175 nach:

Geschäft heute	**Geldfluss heute**
Call verkaufen	+200
0,5 Indexeinheiten kaufen	−3.500
Kredit aufnehmen	+3.325
Summe	+25

Am Ende gleicht sein Depot die Verpflichtung aus dem Call in beiden Fällen genau aus. Die 25 Punkte bleiben ihm, ohne Risiko. Das geht so lange, bis der Preis auf 175 gefallen ist. Liegt der Call unter 175, läuft es umgekehrt.

In dieser Rechnung kam die Wahrscheinlichkeit eines Anstiegs nicht vor. Ob sie 50 % oder 70 % beträgt, ändert den Preis nicht. Der Grund: Die Meinung des Marktes zur Richtung steckt schon im Indexstand von 7.000. Wer optimistischer ist als der Markt, sollte den Index kaufen. Die Option fügt dem nichts hinzu.

Was den Preis dagegen bestimmt, ist der **Abstand** der beiden Möglichkeiten. Lägen sie bei plus und minus 10 %, wäre der Call doppelt so teuer. Der Optionspreis hängt an der Schwankung, nicht an der Richtung.

4. Die allgemeine Formel

Dieselbe Rechnung mit Buchstaben. Der Index steht bei S und springt auf S_u oder S_d. Der Call ist dann C_u oder C_d wert.

$$\Delta \cdot S_u - B = C_u$$
$$\Delta \cdot S_d - B = C_d$$

Abziehen ergibt die Stückzahl:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$$

Das ist das **Delta**: der Unterschied der Optionswerte geteilt durch den Unterschied der Indexstände. Es sagt, wie viel Index man braucht, um die Option nachzubauen. In Kapitel 8 wird daraus die Absicherung des Händlers.

Der Kredit folgt aus der zweiten Gleichung: $B = \Delta \cdot S_d - C_d$. Der Preis des Depots heute ist $\Delta \cdot S - B$. Eingesetzt:

$$C = \Delta \cdot (S - S_d) + C_d = \frac{S - S_d}{S_u - S_d} \cdot (C_u - C_d) + C_d$$

Nennt man den Bruch q, wird daraus eine einfache Form:

$$C = q \cdot C_u + (1 - q) \cdot C_d, \qquad q = \frac{S - S_d}{S_u - S_d}$$

Im Beispiel ist $q = (7.000 - 6.650)/(7.350 - 6.650) = 0{,}5$ und $C = 0{,}5 \times 350 = 175$.

Die Formel sieht aus wie ein Erwartungswert mit der Wahrscheinlichkeit q. Aber q ist keine Prognose. Es ist eine Rechengröße, die allein aus den Indexständen folgt: die Wahrscheinlichkeit, bei der der Index selbst im Mittel nichts verdient. Sie heißt **risikoneutrale Wahrscheinlichkeit**. Mit einem Zins r ändert sich nur wenig: Im Zähler von q steht dann $S \cdot e^{rT}$ statt S, und das Ergebnis wird mit e^{-rT} abgezinst.

5. Zwei Schritte: Der Nachbau muss angepasst werden

Ein einziger Sprung ist zu grob. Mit zwei Schritten wird das Bild schon reicher. Der Index steigt oder fällt je Schritt um den Faktor 1,035 oder 1/1,035:

	Start	nach Schritt 1	nach Schritt 2	Auszahlung Call
zweimal gestiegen			7.498,57	498,57
einmal gestiegen		7.245,00		
Mitte	7.000		7.000,00	0
einmal gefallen		6.763,29		
zweimal gefallen			6.534,57	0

Gerechnet wird von hinten nach vorn, jeder Knoten mit der Formel aus Abschnitt 4. Hier ist $q = 0{,}4914$.

- **Nach einem Anstieg (7.245):** Der Call ist $0{,}4914 \times 498{,}57 = 245{,}00$ wert.
- **Nach einem Rückgang (6.763,29):** Beide Folgezustände zahlen nichts. Der Call ist 0 wert.
- **Am Start:** $0{,}4914 \times 245{,}00 = 120{,}39$.

Wichtiger als der Preis ist, was mit dem Delta passiert:

Knoten	Delta
Start (7.000)	0,51
nach einem Anstieg (7.245)	1,00
nach einem Rückgang (6.763,29)	0,00

Wer den Call nachbaut, hält am Start 0,51 Indexeinheiten. Steigt der Index, muss er auf eine ganze Einheit aufstocken. Fällt der Index, muss er alles verkaufen. **Der Nachbau ist kein einmaliges Geschäft. Er muss nach jeder Bewegung angepasst werden**, und zwar immer in Richtung der Bewegung: kaufen nach einem Anstieg, verkaufen nach einem Rückgang.

Das ist der Kern von allem, was in Teil III folgt. Ein Händler, der einen Call verkauft hat, baut ihn auf genau diese Weise nach, um sein Risiko auszugleichen. Sein Handel im Index ist damit durch den Kursverlauf vorgegeben.

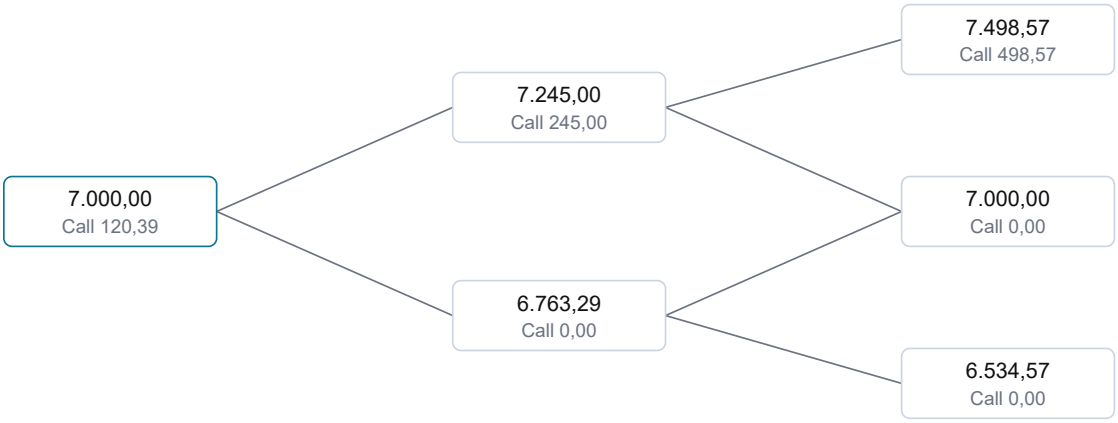


Abb. 1: Der Baum mit zwei Schritten. An jedem Knoten steht oben der Indexstand und darunter der Wert des Calls mit Basispreis 7.000.

6. Viele Schritte

Je mehr Schritte der Baum hat, desto feiner bildet er die möglichen Wege des Index ab. Die Größe der Schritte wird dabei an die Schwankung gekoppelt, mit der man rechnet. Bei einer Volatilität σ im Jahr und Schritten der Länge Δt wählt man

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = \frac{1}{u}$$

Kleinere Schritte in der Zeit bekommen also kleinere Sprünge im Kurs, im Verhältnis der Wurzel. Das ist dieselbe Wurzel wie in Kapitel 3: Die Schwankung wächst mit der Wurzel der Zeit.

Für den Call aus Kapitel 5 (Index 7.000, Basispreis 7.000, 30 Tage, 16 % Vola, Zins null) ergibt der Baum:

Zahl der Schritte	Preis des Calls
1	160,52
2	113,51
5	134,61
10	124,93
50	127,45
100	127,77
1.000	128,05

Der Preis pendelt sich ein. Lässt man die Zahl der Schritte gegen unendlich gehen, landet er bei 128,09. Das ist der Preis aus Kapitel 5.

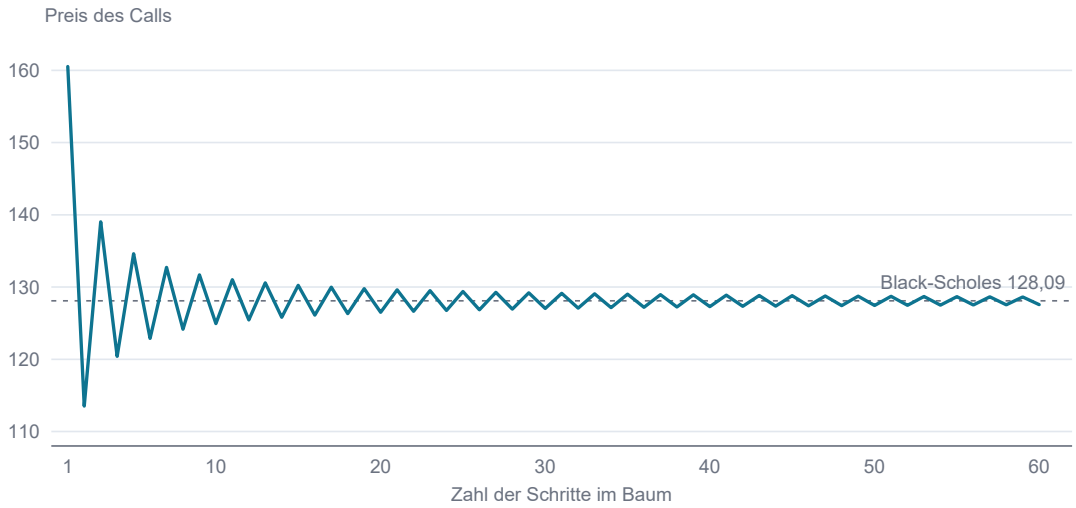


Abb. 2: Preis des Calls im Baum für 1 bis 60 Schritte. Die waagerechte Linie ist der Grenzwert 128,09, den die Formel von Black und Scholes liefert.

7. Die Formel von Black und Scholes

Für den Grenzfall unendlich vieler Schritte gibt es eine geschlossene Formel. Fischer Black, Myron Scholes und Robert Merton haben sie 1973 veröffentlicht. Für einen Call:

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Jede Größe hat eine Bedeutung:

- $N(\cdot)$ ist die Verteilungsfunktion der Normalverteilung. Sie gibt zu jeder Zahl eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1.
- $\sigma\sqrt{T}$ ist die Schwankung über die ganze Laufzeit. Bei 16 % im Jahr und 30 Tagen sind das $0{,}16 \times \sqrt{30/365} = 4{,}59\ \%$.
- $N(d_2)$ ist die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit, dass die Option im Geld endet. $K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$ ist also der heutige Wert des Basispreises, den man bei Ausübung zahlt.
- $S \cdot N(d_1)$ ist der heutige Wert dessen, was man bei Ausübung bekommt.
- $N(d_1)$ ist zugleich das **Delta**: die Stückzahl Index im Nachbau, wie im Baum.

Die Formel ist also dieselbe wie im Baum: Stückzahl mal Index minus Kredit. Nur stehen statt zweier Zustände unendlich viele dahinter.

Rechenbeispiel. Index 7.000, Basispreis 7.000, 30 Tage, 16 % Vola, Zins null:

$$\sigma\sqrt{T} = 0{,}16 \times \sqrt{30/365} = 0{,}04587$$
$$d_1 = \frac{\ln(1) + \tfrac{1}{2} \times 0{,}16^2 \times 30/365}{0{,}04587} = 0{,}02294$$
$$d_2 = 0{,}02294 - 0{,}04587 = -0{,}02294$$
$$N(d_1) = 0{,}50915, \qquad N(d_2) = 0{,}49085$$
$$C = 7.000 \times 0{,}50915 - 7.000 \times 0{,}49085 = 128{,}09$$

Den Preis des Puts liefert die Put-Call-Parität aus Kapitel 5.

Was die Formel voraussetzt: eine Volatilität, die sich nicht ändert, einen Kurs ohne Sprünge, laufendes Anpassen des Nachbaus ohne Kosten. Keine dieser Annahmen stimmt genau. Die Abschnitte 9 und 10 zeigen, wie der Markt damit umgeht.

8. Die implizite Volatilität

Von den fünf Größen in der Formel sind vier bekannt: Index, Basispreis, Laufzeit und Zins. Die fünfte, die Volatilität bis zum Verfall, kennt niemand.

Händler drehen die Formel deshalb um. Sie fragen nicht: „Welcher Preis folgt aus der Vola?“ Sie fragen: „Welche Vola muss ich einsetzen, damit der Preis herauskommt, zu dem die Option gerade gehandelt wird?“ Diese Zahl heißt **implizite Volatilität**.

Rechenbeispiel. Der Call wird nicht zu 128,09 gehandelt, sondern zu 140. Eingesetzt und so lange probiert, bis es passt, ergibt sich eine implizite Vola von 17,49 %. Als Faustregel: Ein Vola-Punkt mehr macht diese Option um rund 8 Punkte teurer. 12 Punkte mehr Preis sind also rund 1,5 Vola-Punkte.

Die implizite Vola ist damit eine andere Schreibweise für den Preis. Sie macht Optionen vergleichbar: 140 Punkte für einen Call sagen wenig, 17,5 % Vola lassen sich mit gestern, mit anderen Basispreisen und mit anderen Märkten vergleichen. Der bekannteste Wert dieser Art ist der VIX, die implizite Vola des S&P 500 für die nächsten 30 Tage.

9. Der Skew: Versicherung kostet extra

Wäre die Formel genau richtig, müssten alle Optionen auf denselben Index mit demselben Verfall dieselbe implizite Vola haben. Das ist nicht so. Bei Aktienindizes gilt seit dem Crash von 1987:

- Puts mit tiefem Basispreis, die vor starken Verlusten schützen, haben eine **höhere** implizite Vola.
- Calls mit hohem Basispreis haben eine **niedrigere**.

Dieses Gefälle heißt **Skew**. Was es in Punkten bedeutet, zeigt ein Beispiel mit angenommenen Vola-Werten:

Option	Preis bei 16 % Vola	Angenommene Vola am Markt	Preis am Markt
Put, Basispreis 6.650 (5 % unter dem Index)	20,71	20 %	39,67
Call, Basispreis 7.350 (5 % über dem Index)	24,24	13 %	11,94

Der Schutz gegen einen Rückgang um mehr als 5 % kostet hier fast das Doppelte dessen, was die Formel mit einheitlicher Vola ergibt. Zwei Gründe wirken zusammen:

- **Nachfrage.** Fonds und Pensionskassen kaufen dauerhaft Puts als Absicherung. Wer sie verkauft, trägt ein Risiko, das er nur schwer weitergeben kann, und verlangt dafür mehr.

- **Die Annahmen stimmen nach unten schlechter.** Märkte fallen schneller, als sie steigen, manchmal in Sprüngen, und die Schwankung nimmt in Abverkäufen zu. Der Nachbau aus Abschnitt 5 funktioniert dann schlechter, als die Formel unterstellt.

10. Die Vola-Prämie: implizit liegt über realisiert

Die implizite Vola ist ein Preis, und in einem Preis für Versicherung steckt ein Aufschlag. Deshalb liegt die implizite Vola im Mittel über der Schwankung, die danach tatsächlich eintritt.

Das haben wir gemessen. Für 2015 bis 2022 lag die Schwankung der jeweils vorangegangenen 20 Tage im Median nur bei 0,76 (S&P 500), 0,84 (Nasdaq 100) und 0,74 (Dow) der impliziten Vola. Eine Folge davon: Die Tagesspanne, die der Optionsmarkt einpreist, hielt den Schlusskurs an 80,1 % der Tage. Bei einer Normalverteilung ohne Aufschlag wären 68,3 % zu erwarten (zur Studie).

Diese Differenz heißt **Volatilitäts-Risikoprämie**. Sie ist der Lohn derer, die Optionen verkaufen, und sie ist kein geschenktes Geld. Der Verkäufer nimmt in ruhigen Zeiten regelmäßig kleine Beträge ein und verliert in einem Crash sehr viel auf einmal. Wie sich das im Buch eines Händlers Tag für Tag zeigt, rechnet Kapitel 8 vor.

Häufiger Irrtum

Häufiger Irrtum: „Die implizite Vola ist die Prognose des Marktes für die kommende Schwankung.“ Sie ist ein Preis, umgerechnet in eine Vola. In diesem Preis steckt die erwartete Schwankung und zusätzlich ein Aufschlag für das Risiko, das der Verkäufer trägt. Deshalb liegt sie im Mittel über der Schwankung, die dann eintritt. Wer aus einem hohen VIX schließt, der Markt „erwarte“ genau diese Bewegung, überschätzt sie systematisch.

Was du jetzt verstehen solltest

- Der Preis einer Option ist der Preis des Depots aus Index und Kredit, das ihre Auszahlung nachbildet. Die Wahrscheinlichkeit eines Anstiegs kommt darin nicht vor.
- Die Stückzahl Index im Nachbau ist das Delta: $\Delta = (C_u - C_d)/(S_u - S_d)$. Es ändert sich mit dem Kurs, also muss der Nachbau laufend angepasst werden.
- Mit immer mehr Schritten geht der Baum in die Formel von Black und Scholes über. Ihre einzige unbekannte Größe ist die Volatilität.
- Die implizite Volatilität ist der in eine Vola umgerechnete Marktpreis. Sie ist je nach Basispreis verschieden. Schutz nach unten ist teurer (Skew).
- Implizite Vola liegt im Mittel über der realisierten. Diese Prämie verdienen Optionsverkäufer dafür, dass sie das Crash-Risiko tragen.

Grenzen dieser Darstellung

- **Kein Beweis.** Dass der Baum gegen die Formel läuft, ist an Zahlen gezeigt, nicht mathematisch bewiesen. Der Beweis braucht Werkzeuge, die hier nicht vorausgesetzt werden.
- **Modellannahmen.** Konstante Vola, keine Sprünge, kostenloser und laufender Handel, kein Zins im Rechenbeispiel. Der Skew ist die sichtbare Korrektur des Marktes für diese Annahmen.

- **Beispielwerte.** Die Vola-Werte in Abschnitt 9 (20 % und 13 %) sind zur Veranschaulichung gewählt, nicht gemessen. Wie steil der Skew ist, ändert sich laufend.
- **Eigene Messung.** Das Verhältnis von realisierter zu impliziter Vola stammt aus 2015 bis 2022 und vergleicht mit der Schwankung der 20 Tage davor.
- **Nicht behandelt:** Optionen mit vorzeitiger Ausübung, Dividenden im Baum und Modelle mit veränderlicher Vola.

Weiter mit Kapitel 7: die Greeks, also wie stark der Optionspreis auf Kurs, Zeit und Vola reagiert.

Erklärung von Marktmechanik an Rechenbeispielen. Keine Anlageberatung, keine Handelsempfehlung. Der Handel mit Futures und Optionen birgt Verlustrisiken bis hin zum Totalverlust und darüber hinaus.